Ein Supplement zum Integralkalkül für die Integration irrationaler Formeln*

Leonhard Euler

Problem 1

§1 *Wenn X außer der Variable x auch die irrationale Formel*

$$s = \sqrt{a+bx}$$

beinhaltet, dennoch so, dass X eine rationale Funktion der zwei Größen x und s ist, die Differentialform Xdx von der Irrationalität zu befreien.

Lösung

Weil die Irrationalität nur in der Formel $s = \sqrt{a+bx}$ vorhanden ist, muss diese nur vermöge einer geeigneten Substitution beseitigt werden, dass daraus der Wert von x nicht irrational wird. Dies wird aber geleistet werden, indem $a + bx = zz$ gesetzt wird, dass $s = z$ und

$$x = \frac{zz-a}{b} \quad \text{und daher} \quad dx = \frac{2}{b}zdz$$

wird; nach Einsetzen dieser Werte wird die ganze Differentialform Xdx in eine rationale, die neue Variable z involvierende, überführt.

*Originaltitel: Supplementum calculi integralis pro integratione formularum irrationalium", zuerst publiziert in: *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1780: I* (1783, geschrieben 1775): pp. 3–31, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 18, pp. 83–112, Eneström Nummer E539, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

Beispiel 1

§2 Wenn

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} \quad \text{oder} \quad dy = \frac{dx}{s}$$

war, wird nach Setzen von $\sqrt{a+bx} = z$

$$dy = \frac{2}{b}dz$$

und durch Integrieren $y = \frac{2z}{b}$ werden, woher man nach der Substitution

$$y = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C$$

berechnet.

Beispiel 2

§3 Wenn

$$dy = dx\sqrt{a+bx} = sdx$$

war, wird nach Nehmen von $\sqrt{a+bx} = z$

$$dy = zdx = \frac{2}{b}zzdz$$

sein, woher durch Integration $y = \frac{2}{3b}z^3$ wird und nach der Substitution

$$y = \frac{2}{3b}(a+bx)^{\frac{3}{2}} + C$$

hervorgeht. Wenn dieses Integral für $x = 0$ verschwinden muss, wird $C = -\frac{2a\sqrt{a}}{3b}$ werden und daher

$$y = \frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}} - 2a\sqrt{a}}{3b}.$$

Beispiel 3

§4 Wenn

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{a+bx}}$$

war, wird nach der Substitution $\sqrt{a+bx} = z$

$$dy = \frac{2(zz-a)dz}{bb} = \frac{2zzdz - 2adz}{bb}$$

sein, woher durch Integrieren $y = \frac{2}{3bb}z^3 - \frac{2a}{bb}z + C$ und nach der Auflösung

$$y = \frac{2}{3bb}(a+bx)^{\frac{3}{2}} - \frac{2a}{bb}\sqrt{a+bx} + C = \frac{2\sqrt{a+bx}}{bb}\left(\frac{1}{3}bx - \frac{2}{3}a\right) + C$$

wird.

Beispiel 4

§5 Wenn

$$dy = \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}$$

war, wird nach der Substitution $\sqrt{a+bx} = z$ dann $dy = \frac{dx}{z^3}$ sein; diese Formel geht wegen $dx = \frac{2zdz}{b}$ weiter über in

$$dy = \frac{2dz}{bzz},$$

nach Integrieren von welcher $y = -\frac{2}{bz}$ oder nach der Rücksubstitution

$$y = \frac{-2}{b\sqrt{a+bx}} + C$$

wird. Hier sei bemerkt, dass für C dann $\frac{2}{b\sqrt{a}}$ genommen werden muss, wenn das Integral für $x = 0$ verschwinden soll.

PROBLEM 2

§6 *Wenn X irgendeine rationale Funktion der beiden Größen x und s war, während*

$$s = \sqrt[3]{a+bx}$$

ist, die Differentialform Xdx von der Irrationalität zu befreien.

LÖSUNG

Man setze $\sqrt[3]{a+bx} = Z$, dass $s = z$ ist; es wird $a + bx = z^3$ und daher

$$x = \frac{z^3 - a}{b} \quad \text{und} \quad dx = \frac{3zzdz}{b}$$

sein; nach Einsetzen dieser Werte wird die ganze Form rational werden.

BEISPIEL 1

§7 Wenn

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{dx}{s}$$

war, wird nach Setzen von $\sqrt[3]{a+bx} = z$ und Einsetzen das daraus entstehenden Wertes $dx = \frac{3zzdz}{b}$

$$dy = \frac{3zdz}{b}$$

sein, woher durch Integrieren

$$y = \frac{3}{2b}zz = \frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+bx)^2} + C$$

wird.

BEISPIEL 2

§8 Wenn

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{dx}{ss}$$

war, wird nach Setzen von $\sqrt[3]{a+bx} = z$

$$dy = \frac{3dz}{b}$$

werden, daher durch Integrieren

$$y = \frac{3}{b}z = \frac{3}{b}\sqrt[3]{a+bx} + C.$$

Beispiel 3

§9 Wenn

$$dy = dx\sqrt[3]{a+bx} = sdx$$

war, wird nach der Substitution

$$dy = \frac{3z^3dz}{b},$$

daher durch Integrieren

$$y = \frac{3}{4b}z^4 = \frac{3}{4b}(a+bx)\sqrt[3]{a+bx} + C.$$

Problem 3

§10 *Wenn X eine rationale Funktion der zwei Größen x und s war, während*

$$s = \sqrt[n]{a+bx}$$

wird, die Differentialform Xdx von der Irrationalität zu befreien.

Lösung

Man setze $\sqrt[n]{a+bx} = z$, dass $s = z$ ist; es wird $a + bx = z^n$ sein, daher

$$x = \frac{z^n - a}{b} \quad \text{und} \quad dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b};$$

nach Einsetzen dieser Werte wird die vorgelegte Formel Xdx gewiss rational werden, wenn nur der Exponent n eine ganze Zahl war.

BEISPIEL 1

§11 Wenn

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[n]{a+bx}} = \frac{dx}{s}$$

war, wird nach Setzen von $\sqrt[n]{a+bx} = z$ wegen des daraus entstehenden Wertes $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$

$$dy = \frac{nz^{n-2}dz}{b}$$

werden, woher wir durch Integrieren $y = \frac{n}{b(n-1)}z^{n-1} + C$ berechnen oder nach Wiedereinsetzen der Werte

$$y = \frac{n}{b(n-1)}(a+bx)^{\frac{n-1}{n}} + C = \frac{n}{b(n-1)} \cdot \frac{a+bx}{\sqrt[n]{a+bx}} + C.$$

BEISPIEL 2

§12 Wenn

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[n]{(a+bx)^{\lambda}}} = \frac{dx}{s^{\lambda}}$$

war, wird nach Setzen von $\sqrt[n]{a+bx} = z$ und Einsetzen des Wertes $dx = \frac{nz^{n-1}dz}{b}$

$$dy = \frac{nz^{n-1}dz}{bz^{\lambda}} = \frac{n}{b}z^{n-\lambda-1}dz$$

werden, deren Integral

$$y = \frac{n}{b(n-\lambda)}(a+bx)^{\frac{n-\lambda}{n}} + C \quad \text{oder} \quad y = \frac{n}{b(n-\lambda)} \cdot \frac{a+bx}{\sqrt[n]{(a+bx)^{\lambda}}} + C$$

gibt. Aus diesen Beispielen ist aber schon klar, dass die Integration nicht behindert wird, auch wenn die Exponenten n und λ keine ganzen Zahlen waren.

PROBLEM 4

§13 *Wenn X eine rationale Funktion der zwei Größen x und s war, während*

$$s = \sqrt{a + b\sqrt{f + gx}}$$

ist, welche Formel also eine doppelte Irrationalität beinhaltet, die Differentialform Xdx von dieser zweifachen Irrationalität zu befreien.

LÖSUNG

Man setze wiederum $\sqrt{a + b\sqrt{f + gx}} = z$, dass $s = z$ ist; nach Nehmen von Quadraten wird $a + b\sqrt{f + gx} = zz$ sein, daher $b\sqrt{f + gx} = zz - a$ und nach erneutem Nehmen von Quadraten $bb(f + gx) = (zz - a)^2$, woher man

$$x = \frac{(zz - a)^2}{bbg} - \frac{f}{g} \quad \text{und daher} \quad dx = \frac{4zdz(zz - a)}{bbg}$$

berechnet. Nach Einsetzen dieser Werte wird die ganze Formel rational gemacht werden.

KOROLLAR

§14 Es ist ersichtlich, dass die Irrationalität auf dieselbe Weise beseitigt werden kann, wenn viel allgemeiner

$$s = \sqrt[n]{a + b\sqrt[m]{f + gx}}$$

war. Denn, nachdem diese Formel $= z$ gesetzt worden ist, wird

$$a + b\sqrt[m]{f + gx} = z^n \quad \text{und} \quad b\sqrt[m]{f + gx} = z^n - a$$

werden. Weiter ist $b^m(f + gx) = (z^n - a)^m$ und daher schließt man

$$x = \frac{(z^n - a)^m}{b^m g} - \frac{f}{g} \quad \text{und daher} \quad dx = \frac{mnz^{n-1}dz(z^n - a)^{m-1}}{b^m g}.$$

Und so wird auch auf diese Weise die ganze Formel rational werden.

Problem 5

§15 *Wenn X eine rationale Funktion der zwei Größen x und s war, während*

$$s = \sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}}$$

ist, die Differentialform Xdx von der Irrationalität zu befreien.

Lösung

Man setze $\sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}} = z$ und nach Nehmen der Quadrate wird $\dfrac{a+bx}{f+gx} = zz$ sein und daher

$$x = \frac{fzz-a}{b-gzz},$$

woher man durch Differenzieren

$$dx = \frac{2bfzdz - 2agzdz}{(b-gzz)^2}$$

berechnet. Und nach Einsetzen dieser Werte wird die vorgelegte Form Xdx rational gemacht werden.

Beispiel 1

§16 Wenn

$$dy = \frac{dx}{s} = \frac{dx\sqrt{f+gx}}{\sqrt{a+bx}}$$

war, wird nach Setzen von $\sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}}$ auch $dy = \frac{dx}{z}$ sein und nach Einsetzen des oben gefundenen Wertes anstelle von dx berechnet man

$$dy = \frac{2(bf-ag)dz}{(b-gzz)^2};$$

diese Formel, wie schon hinreichend bekannt ist, kann auf eine solche

$$\int \frac{dz}{b-gzz}$$

reduziert werden, deren Integration entweder mit Logarithmen oder mit Kreisbogen erledigt werden wird.

BEISPIEL 2

Es sei spezieller

$$dy = \frac{dx\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}},$$

wo $f = 1$, $g = -1$, $a = 1$ und $b = 1$ und daher

$$z = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \quad \text{und} \quad dx = \frac{4zdz}{(1+zz)^2}$$

ist; nach Einsetzen dieser Werte wird

$$dy = \frac{4dz}{(1+zz)^2}$$

werden. Man setze also

$$\int \frac{4dz}{(1+zz)^2} = \frac{Az}{1+zz} + B\int \frac{dz}{1+zz} = y,$$

woher nach Nehmen von Differentialen

$$\frac{4}{(1+zz)^2} = \frac{A - Azz}{(1+zz)^2} + \frac{B}{1+zz} = \frac{A + B + (B-A)zz}{(1+zz)^2}$$

werden wird. Es muss also $A + B = 4$ und $B - A = 0$ und daher $A = 2$ und $B = 2$ sein; und weil $\int \frac{dz}{1+zz} = \arctan z$ ist, erhalten wir $y = \frac{2z}{1+zz} + 2\arctan z$, weshalb nach der Auflösung wegen $1 + zz = \frac{2}{1-x}$

$$y = \sqrt{1-xx} + 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

werden wird. Weil also der Tangens dieses Bogens $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ist, wird sein Sinus $= \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ und der Kosinus $= \sqrt{\frac{1-x}{2}}$ sein; aber der Sinus des doppelten Winkels wird $\sqrt{1-xx}$ und der Kosinus $-x$ sein, woher

$$2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} + \arcsin x$$

werden wird; deshalb wird das gesuchte Integral

$$y = \sqrt{1-xx} + \frac{\pi}{2} + \arcsin x + C$$

sein; wenn dieses so genommen werden muss, dass es für $x = 0$ verschwindet, wird $C = -1 - \frac{\pi}{2}$ sein und daher

$$y = \sqrt{1-xx} - 1 + \arcsin x.$$

Also, wenn dann $x = 1$ genommen wird, wird $y = \frac{\pi}{2} - 1$ werden, welcher Wert in Dezimalbrüchen $0,5707963$ gibt.

PROBLEM 6

§18 *Wenn X eine rationale Funktion der beiden Variablen x und s war, während*

$$s = \sqrt[n]{\frac{a+bx}{f+gx}}$$

ist, die Differentialform Xdx rational zu machen.

LÖSUNG

Nach Setzen von $s = \sqrt[n]{\frac{a+bx}{f+gx}} = z$ wird $\frac{a+bx}{f+gx} = z^n$ und daher

$$x = \frac{fz^n - a}{b - gz^n}$$

sein, als logische Konsequenz

$$dx = \frac{n(bf-ag)z^{n-1}dz}{(b-gz^n)};$$

und nach Einsetzen dieser Werte wird die ganze vorgelegte Form Xdx rational gemacht sein.

PROBLEM 7

§19 *Wenn X eine Funktion der zwei Größen xx und s war, während*

$$s = \sqrt{a + bxx}$$

ist, die Differentialform $\frac{Xdx}{x}$ von der Irrationalität zu befreien.

Lösung

Wir wollen $s = \sqrt{a+bxx} = z$ setzen; es wird $a + bxx = zz$ sein, daher

$$xx = \frac{zz-a}{b},$$

und weil im Bruch X nur das Quadrat xx und daher seine geraden Potenzen auftreten, wird durch diese Substitution die Funktion X schon rational werden. Aber nach Nehmen von Logaithmen $2\log x = \log(zz-a) - \log b$ und anschließendem Differenzieren wird $\frac{2dx}{x} = \frac{2zdz}{zz-a}$ und daher

$$\frac{dx}{x} = \frac{zdz}{zz-a}.$$

Auf diese Weise wird also die vorgelegte Formel $X\frac{dx}{x}$ vollkommen rational gemacht werden.

Beispiel 1

§20 Wenn

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{a+bxx}}$$

war, wird

$$dy = \frac{dx}{x} \cdot \frac{xx}{\sqrt{a+bxx}} = \frac{xx}{s} \cdot \frac{dx}{x}$$

sein. Nach Setzen von $\sqrt{a+bxx} = z$ wird also

$$dy = \frac{dz}{b}$$

sein, woher man durch Integrieren

$$y = \frac{z}{b} = \frac{\sqrt{a+bxx}}{b}$$

berechnet.

BEISPIEL 2

§21 Wenn

$$dy = \frac{x^3 dx}{\sqrt{a+bxx}} = \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^4}{s}$$

war, wird durch Setzen von $\sqrt{a+bxx} = z$, dass

$$xx = \frac{zz-a}{b} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x} = \frac{zdz}{zz-a}$$

ist,

$$dy = \frac{1}{bb} dz(zz-a)$$

sein und daher erhalten wir durch Integrieren $y = \frac{z}{3bb}(zz-3a)$; daher wird nach Wiedereinsetzen das gesuchte Integral als

$$y = \frac{bxx-2a}{3bb}\sqrt{a+bxx} + C$$

hervorgehen.

BEISPIEL 3

§22 Wenn

$$dy = \frac{x^3 dx}{\sqrt{(a+bxx)^3}}$$

war, wird $dy = \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^4}{s^3}$ sein; daher wird nach Setzen von $\sqrt{a+bxx} = s = z$

$$dy = \frac{dz}{bb} \cdot \frac{zz-a}{zz}$$

werden, woher nach Nehmen des Integrals $y = \frac{1}{bb} \cdot \frac{zz+a}{z}$ werden wird, weshalb nach der Auflösung

$$y = \frac{2a+bxx}{bb\sqrt{a+bxx}} + C$$

resultiert.

Problem 8

§23 *Wenn X eine rationale Funktion der beiden Größen x^n und s war, während*

$$s = \sqrt[m]{a + bx^n}$$

ist, die Differentialform $X\frac{dx}{x}$ rational zu machen.

Lösung

Nach Setzen von $s = \sqrt[m]{a + bx^n} = z$ wird $a + bx^n = z^m$ und

$$x^n = \frac{z^m - a}{b}$$

werden. Weil also in der Funktion X nur die Potenz x^n auftritt, wird sie rational gemacht werden, wenn diese Werte eingesetzt werden. Aber dann wird man nach Nehmen von Logarithmen

$$n \log x = \log(z^m - a) - \log b$$

und durch Differenzieren

$$\frac{dx}{x} = \frac{mz^{m-1}dz}{n(z^m - a)}$$

haben und so wird die vorgelegte Formel rational werden.

Beispiel

§24 Es sei

$$dy = \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt[m]{a + bx^n}} = \frac{dx}{x} \cdot \frac{x^n}{s}$$

und nach der Substitution wird diese Gleichung entspringen

$$dy = \frac{mz^{m-2}dz}{bn},$$

nach Integrieren von welcher

$$y = \frac{mz^{m-1}}{nb(m-1)} = \frac{m}{nb(m-1)} \sqrt[m]{(a + bx^n)^{m-1}} + C$$

oder

$$y = \frac{m}{nb(m-1)} \cdot \frac{a+bx^n}{\sqrt[m]{a+bx^n}} + C$$

hervorgehen wird.

PROBLEM 9

§25 *Wenn X eine rationale Funktion der Größen xx und s war, während*

$$s = \sqrt{\frac{a+bxx}{f+gxx}}$$

ist, die Differentialform $X\frac{dx}{x}$ von der Irrationalität zu befreien.

LÖSUNG

Man setze $s = \sqrt{\frac{a+bxx}{f+gxx}} = z$ und es wird $\frac{a+bxx}{f+gxx} = zz$ sein, daher

$$xx = \frac{fzz-a}{b-gzz},$$

woher die Funktion X völlig rational wird. Weiter differenziere man nach Nehmen von Logarithmen

$$2\log x = \log(fzz-a) - \log(b-gzz),$$

dass

$$\frac{2dx}{x} = \frac{2fzdz}{fzz-a} + \frac{2gzdz}{b-gzz} = \frac{2(bf-ag)zdz}{(fzz-a)(b-gzz)}$$

hervorgeht, woher

$$\frac{dx}{x} = \frac{(bf-ag)zdz}{(fzz-a)(b-gzz)}$$

wird; und so wird die ganze Differentialform rational werden.

§26 Wenn

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{f+gxx}}$$

war, wollen wir diese Formel so darstellen

$$dy = \frac{dx}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{f+gxx}} = \frac{dx}{x}\sqrt{\frac{xx}{f+gxx}}.$$

Hier wird also $a = 0$, $b = 1$ und $z = \frac{x}{\sqrt{f+gxx}}$ sein, sodass $dy = \frac{zdx}{x}$ ist; es wird aber $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z(1-gzz)}$ sein, woher

$$dy = \frac{dz}{1-gzz}$$

wird, die Integration welcher Formel mit Logarithmen erledigt werden wird, wenn g eine positive Zahl war; wenn es aber negativ war, wird sie mit Kreisbogen durchgeführt werden.

Es sei also 1) $g = +bb$; es wird

$$dy = \frac{dz}{1-bbzz}$$

und daher

$$y = \frac{1}{2b}\log\frac{1+bz}{1-bz}$$

sein und nach Wiedereinsetzen der oben angegeben Werte wird

$$y = \frac{1}{2b}\log\frac{\sqrt{f+bbxx}+bx}{\sqrt{f+bbxx}-bx} = \frac{1}{b}\log\frac{\sqrt{f+bbxx}+bx}{\sqrt{f}}$$

sein.

Es sei 2) g eine negative Größe, sei sie $g = -bb$; es wird

$$dy = \frac{dz}{1+bbzz} = \frac{1}{b}\cdot\frac{bdz}{1+bbzz}$$

sein, woher man

$$y = \frac{1}{b}\arctan bz = \frac{1}{b}\arctan\frac{bx}{\sqrt{f-bbxx}}$$

berechnet. Hier ist es offensichtlich, dass f eine positive Größe sein muss, weil andernfalls die Differentialform eine imaginäre wäre.

Korollar

§27 Daher, wenn die Formel

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1+xx}}$$

vorgelegt wird, wo $f = 1$ und $g = 1$ ist, wird also aus dem ersten Fall wegen $b = +1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+xx}} = \log\left(\sqrt{1+xx}+x\right)$$

sein. Aber wenn

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$$

war, wo $f = 1$ und $g = -1$ ist, berechnet man aus dem zweiten Fall $y = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-xx}}$, woher man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \arcsin x = \arccos\sqrt{1-xx}$$

schließt.

Problem 10

§28 *Wenn X eine rationale Funktion der Größe x^n und s war, während*

$$s = \sqrt[n]{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}}$$

ist, die Differentialform $X\frac{dx}{x}$ rational zu machen.

Lösung

Man setze $s = \sqrt[n]{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}} = z$ und es wird $\frac{a+bx^n}{f+gx^n} = z^n$ sein, daher

$$x^n = \frac{fz^n - a}{b - gz^n};$$

dann wird aber nach Nehmen von Logarithmen

$$n \log x = \log(fz^n - a) - \log(b - gz^n)$$

und durch Differenzieren

$$\frac{dx}{x} = \frac{fz^{n-1}dz}{fz^n - a} + \frac{gz^{n-1}dz}{b - gz^n} = \frac{(bf - ag)z^{n-1}dz}{(fz^n - a)(b - gz^n)}$$

sein; nach Einsetzen dieser Werte wird die vorgelegte Formel rational.

Problem 11

§29 *Wenn X eine rationale Funktion der Größen x^n und s war, während*

$$s = \sqrt[m]{\frac{a + bx^n}{f + gx^n}}$$

wird, die Differentialform $X\frac{dx}{x}$ von jeder Irrationalität zu befreien.

Lösung

Man setze $s = \sqrt[m]{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}} = z$ und es wird $\frac{a+bx^n}{f+gx^n} = z^m$ sein, woher

$$x^n = \frac{fz^m - a}{b - gz^m}$$

wird; daher wird nach Nehmen von Logarithmen

$$n \log x = \log(fz^m - a) - \log(b - gz^m)$$

sein, daher durch Differenzieren

$$\frac{ndx}{x} = \frac{m(bf - ag)z^{m-1}dz}{(fz^m - a)(b - gz^m)}$$

und daher

$$\frac{ndx}{x} = \frac{m(bf - ag)z^{m-1}dz}{(fz^m - a)(b - gz^m)}$$

und daraus

$$\frac{dx}{x} = \frac{m(bf - ag)z^{m-1}dz}{n(fz^m - a)(b - gz^m)};$$

nach Einsetzen dieser Werte wird die Irrationalität der vorgelegten Formel völlig beseitigt.

PROBLEM 12

§30 *Wenn X irgendeine rationale Funktion der zwei Größen x und s war, während*

$$s = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma xx}$$

ist, die Differentialform Xdx rational zu machen.

LÖSUNG

Hier ist es ratsam, zwei Fälle voneinander zu unterscheiden, je nachdem ob γ eine positive oder negative Größe war.

I. Es sei γ eine positive Größe und man setze $\gamma = cc$ und $\beta = 2bc$, dass man

$$s = \sqrt{\alpha + 2bcx + ccxx} = \sqrt{(\alpha - bb + (b + cx)^2}$$

hat, wo man der Kürze wegen e anstelle von $\alpha - bb$ schreibe, dass $s = \sqrt{e + (b + cx)^2}$ ist. Nun setze man $s = b + cx + z$ und es wird

$$ss = e + (b + cx)^2 = (b + cx)^2 + 2(b + cx)z + zz,$$

woher

$$e - zz = 2z(b + cx) \quad \text{oder} \quad b + cx = \frac{e - zz}{2z}$$

folgt; und daher berechnet man

$$x = \frac{e - zz}{2cz} - \frac{b}{c} \quad \text{oder} \quad x = \frac{e - 2bz - zz}{2cz}.$$

Aber die Gleichung $b + cx = \frac{e-zz}{2z}$ liefert differenziert

$$cdx = -\frac{edz}{2zz} - \frac{dz}{2} = -\frac{edz + zzdz}{2zz},$$

woher man

$$dx = -\frac{dz(e + zz)}{2czz}$$

ableitet; aber wegen $b + cx = \frac{e-zz}{2z}$ wird

$$s = \frac{e + zz}{2z}$$

werden. Nachdem also diese Werte eingesetzt worden sind, wird unsere Form Xdx rational gemacht werden. Nachdem also ihr Integral gefunden worden ist, wird anstelle von z der zuvor gefundene Wert $\sqrt{e + (b + cx)^2} - b - cx$ einzusetzen sein.

II. Wenn aber γ eine negative Größe war, setze man $\gamma = -cc$ und $\beta = -2bc$, dass man

$$s = \sqrt{\alpha - 2bcx - ccxx} = \sqrt{\alpha + bb - (b + cx)^2}$$

hat, wo es ersichtlich ist, dass die Größe $\alpha + bb$ notwendig eine positive Größe sein muss, weil andernfalls s imaginär werden würde. Deswegen wollen wir der Kürze wegen $\alpha + bb = aa$ setzen, dass $s = \sqrt{aa - (b + cx)^2}$ ist, um welche Form rational zu machen, wollen wir

$$\sqrt{aa - (b + cx)^2} = a - (b + cx)z$$

setzen, woher nach Nehmen von Quadraten

$$aa - (b + cx)^2 = aa - 2az(b + cx) + (b + cx)^2 zz$$

sein wird, welche Gleichung auf diese reduziert wird

$$-(b + cx) = -2az + (b + cx)zz,$$

woher man

$$b + cx = \frac{2az}{1+zz}$$

und daher

$$x = \frac{2az - b - bzz}{c(1+zz)}$$

findet. Jene Gleichung gibt aber differenziert

$$cdx = \frac{2adz(1+zz) - 4azzdz}{(1+zz)^2} = \frac{2adz(1-zz)}{(1+zz)^2},$$

woher

$$dx = \frac{2adz(1-zz)}{c(1+zz)^2}$$

wird. Weil aber weiter $s = a - (b+cx)z$ ist, wird wegen $b + cx = \frac{2az}{1+zz}$

$$s = \frac{a(1-zz)}{1+zz}$$

sein, weshalb, wenn anstelle von x, s und dx diese gefundenen Werte eingesetzt werden, die vorgelegte Differentialformel Xdx rational und mit der Variable z ausgedrückt werden wird; Nachdem ihr Integral gefunden worden war, setze man überall an seiner Stelle wieder den angenommenen Wert

$$z = \frac{a - \sqrt{aa - (b+cx)^2}}{b+cx}$$

und man wird das Integral allein mit der Variable x ausgedrückt haben.

Beispiel 1

§31 Wenn

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{e + (b+cx)^2}}$$

war, welche Formel sich auf den ersten Fall bezieht, wird

$$dy = \frac{dx}{s} = -\frac{dz}{cz}$$

sein, wegen

$$dx = -\frac{dz(e+zz)}{2czz} \quad \text{und} \quad s = \frac{e+zz}{2z},$$

deren Integral $y = -\frac{1}{c}\log z$ ist; nachdem also der Wert

$$z = \sqrt{e+(b+cx)^2} - b - cx$$

wieder eingesetzt worden ist, wird

$$y = -\frac{1}{c}\log(\sqrt{e+(b+cx)^2} - b - cx) + C$$

sein; wenn das Integral für $x = 0$ verschwindet, wird

$$C = \frac{1}{c}\log\left(\sqrt{e+bb} - b\right)$$

werden.

KOROLLAR

§32 Wenn $b = 0$ und $c = 1$ gesetzt wird oder

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{e+xx}}$$

ist, wird das Integral

$$y = -\log(\sqrt{e+xx} - x) + \log\sqrt{e} = \log\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e+xx} - x}$$

sein, welche Formel auf diese zurückgeführt wird

$$y = \log\frac{\sqrt{e+xx} + x}{\sqrt{e}}.$$

Weil weiter $d.\sqrt{e+xx} = \frac{xdx}{\sqrt{e+xx}}$ ist, wird

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{e+xx}} = \sqrt{e+xx}$$

sein. Wenn diese zwei Formeln also kombiniert werden, wird man diese bemerkenswerte Integration haben

$$\int \frac{Adx + Bxdx}{\sqrt{e+xx}} = A \log \frac{\sqrt{e+xx}+x}{\sqrt{e}} + B\sqrt{e+xx}.$$

BEISPIEL 2

§33 Es sei

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{aa-(b+cx)^2}},$$

welche Form auf den zweiten Fall zu beziehen ist, sodass $dy = \frac{dx}{s}$ ist. Weil also

$$dx = \frac{2adz(1-zz)}{c(1+zz)^2} \quad \text{und} \quad s = \frac{a(1-zz)}{1+zz}$$

ist, wird

$$dy = \frac{dx}{s} = \frac{2}{c} \cdot \frac{dz}{1+zz}$$

sein, woher durch Integrieren $y = \frac{2}{c} \arctan z$ wird. Weil also

$$z = \frac{a - \sqrt{aa-(b+cx)^2}}{b+cx}$$

ist, wird

$$y = \frac{2}{c} \arctan \frac{a - \sqrt{aa-(b+cx)^2}}{b+cx} + C$$

sein.

KOROLLAR

§34 Es sei also wiederum $b = 0$ und $c = 1$ oder die Differentialform

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{aa-xx}}$$

vorgelegt und man wird

$$y = 2 \arctan \frac{a-\sqrt{aa-xx}}{x} + C$$

finden. Weil also der Tangens dieses Bogens $\frac{a-\sqrt{aa-xx}}{x}$ ist, wird der Tangens des doppelten Bogens $\frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$ sein, sodass

$$y = \arctan \frac{x}{\sqrt{aa-xx}}$$

ist; der Sinus dieses Bogens wird aber $\frac{x}{a}$ sein und so das gesuchte Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} = \arcsin \frac{x}{a}$$

sein. Weil weiter $d.\sqrt{aa-xx} = -\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}$ ist, wird

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}} = -\sqrt{aa-xx}$$

sein, weshalb diese allgemeinere Integration aufgestellt wird

$$\int \frac{Adx + Bxdx}{\sqrt{aa-xx}} = A \arcsin \frac{x}{a} - B\sqrt{aa-xx}.$$

PROBLEM 13

§35 *Wenn V eine rationale Funktion der zwei Größen v^n und s, während*

$$s = \sqrt{\alpha + \beta v^n + \gamma v^{2n}}$$

ist, die Differentialform $Vv^{n-1}dv$ von der Irrationalität zu befreien.

LÖSUNG

Man setze $v^n = x$; es wird

$$s = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma xx} \quad \text{und} \quad v^{n-1}dv = \frac{dx}{n}$$

sein; hier wird also nun V eine rationale Funktion der zwei Größen x und s sein, während $s = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma xx}$ ist, und die von der Irrationalität zu befreiende Form wird $\frac{Vdx}{n}$ sein; dieser Fall stimmt vollkommen mit dem vorhergehenden Problem überein und wird daher dieselbe Lösung haben.

Scholion

§36 Die bisher angegebenen Vorschriften erstrecken sich auf fast alle Differentialformen, die freilich bisher behandelt werden kannten. Dennoch können indes Fälle von solcher Art auftreten, in denen eine geeignete Substitution, um die Irrationalität zu beseitigen, nicht so leicht erkannt wird, sondern sich erst mit Scharfsinn ausfindig machen lässt; weil es bei dieser Aufgabe noch nicht möglich ist, allgemeine Vorschriften anzugeben, wollen wir gewisse spezielle Beispiele anstelle einer Anleitung beifügen.

Beispiel 1

§37 *Wenn diese irrationale Form*

$$dP = \frac{dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{1+x^4}}$$

vorgelegt war, ihr Integral P ausfindig zu machen.

Wenn jemand hier eine Substitution von solcher Art gebrauchen wollte, mit welcher die Formel $\sqrt{1+x^4}$ rational gemacht werden würde, wäre alle Mühe und aller Aufwand vergebens; indes wird dennoch mit einem einzigartigen Kunstgriff die folgende Substitution die Aufgabe erledigen können. Man setze

$$\frac{x\sqrt{2}}{1-xx} = p$$

und es wird $1+pp = \dfrac{1+x^4}{(1-xx)^2}$ sein, daher

$$\sqrt{1+pp} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-xx};$$

dann wird aber durch Differenzieren

$$dp = \frac{dx\sqrt{2}(1+xx)}{(1-xx)^2}$$

sein, aus welchen Werten man

$$\frac{dp}{\sqrt{1+pp}} = \frac{dx\sqrt{2}(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{1+x^4}}$$

berechnet, welche glücklicherweise mit der vorgelegen Form selbst übereinstimmt, sodass

$$\frac{dp}{\sqrt{1+pp}} = dP\sqrt{2} \quad \text{oder} \quad dP = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dp}{\sqrt{1+pp}}$$

ist, woher man durch Integrieren

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(\sqrt{1+pp} + p)$$

berechnet. Wenn also anstelle von p und $\sqrt{1+pp}$ die gegebenen Werte eingesetzt werden, wird diese ziemlich bemerkenswerte Integration erhalten

$$P = \int \frac{dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-xx}.$$

BEISPIEL 2

§38 *Wenn diese irrationale Formel vorgelegt war*

$$\frac{dx(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{1+x^4}},$$

ihr Integral Q ausfindig zu machen.

Um dies zu leisten, werde

$$\frac{x\sqrt{2}}{1+xx} = q$$

und es wird

$$\sqrt{1-qq} = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1+xx}$$

sein; dann wird aber

$$dq = \frac{dx(1-xx)\sqrt{2}}{(1+xx)^2}$$

sein und daher berechnet man

$$\frac{dq}{\sqrt{1-qq}} = \frac{dx(1-xx)\sqrt{2}}{(1+xx)\sqrt{1+x^4}} = dQ\sqrt{2},$$

woher

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dq}{\sqrt{1-qq}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin q$$

wird. Nachdem also der für q angenommene Wert wieder eingesetzt worden ist, wird man diese Integration erhalten

$$Q = \int \frac{dx(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

SCHOLION

§39 Weil diese zwei Formen

$$\frac{dx(1+xx)\sqrt{2}}{(1-xx)\sqrt{1+x^4}} \quad \text{und} \quad \frac{dx(1-xx)\sqrt{2}}{(1+xx)\sqrt{1+x^4}}$$

auf diese einfachen gebracht worden sind

$$\frac{dp}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad \frac{dq}{\sqrt{1-qq}},$$

jede der beiden von welchen leicht von der Irrationalität befreit wird, können die vorgelegten Formen selbst mit einer geeigneten Substitution von der Irrationalität befreit werden; daher ist es nicht verwunderlich, dass deren Integrale entweder mit Logarithmen oder mit Kreisbogen dargeboten werden konnten. Denn es ist schon zur Genüge gezeigt worden, dass die Integrale aller rationalen Differentialformen immer entweder mit Logarithmen oder mit Kreisbogen oder sogar algebraisch dargeboten werden können; dies ist also auch über jene irrationalen Formen festzuhalten, welche sich mithilfe einer gewissen Substitution rational machen lassen. Daher werden umgekehrt viele Geometer schließen, wenn diese Differentialformeln auf gar keine Art von der Irrationalität befreit werden können, dass ihr Integral dann auch weder mit Logarithmen noch mit Kreisbogen und noch viel weniger algebraisch ausgedrückt werden kann, sondern zu einem anderen Geschlecht von transzendenten Größen gezählt werden muss. Überdies führt die Kombination der zwei vorgehenden Beispiele zur folgenden Lösung.

Beispiel 3

§40 *Wenn diese Differentialform vorgelegt war*

$$dy = \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4},$$

ihr Integral zu finden.

Diese Formel lässt sich durch keine der beiden zuvor verwendeten Substitutionen rational machen, dennoch werden beide zusammen die Aufgabe erledigen können; denn ihr Integral wird durch Logarithmen und Kreisbogen mit dem folgenden Kunstgriff ausgeführt werden. Denn die vorgelegte Formel kann in die zwei folgenden Teile geteilt werden, welche

$$dy = \frac{\frac{1}{2}dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{1+x^4}} + \frac{\frac{1}{2}dx(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{1+x^4}}$$

sind, von welchen die Summe die vorgelegte Form selbst ergibt; es geht nämlich

$$dy = \frac{\frac{1}{2}dx(1+xx)^2 + \frac{1}{2}dx(1-xx)^2}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{dx(1+x^4)}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$$

hervor. Wenn also die zwei vorhergehenden Beispiele zur Hilfe genommen werden, wird natürlich $dy = \frac{1}{2}dP + \frac{1}{2}dQ$ werden, als logische Konsequenz wird das gesuchte Integral $y = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$ sein, welches sich auf die folgende Weise ausdrücken lassen wird

$$\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-xx} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Beispiel 4

§41 *Wenn diese Differentialform vorgelegt war*

$$dy = \frac{xxdx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}},$$

ihr Integral zu finden.

Diese Formel kann auf die gleiche Weise wie die vorgehende behandelt werden; man teile sie nämlich in die zwei folgenden Teile auf

$$\frac{\frac{1}{4}dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{1+x^4}} - \frac{\frac{1}{4}dx(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{1+x^4}},$$

welche zusammengenommen

$$dy = \frac{\frac{1}{4}dx(1+xx)^2 - \frac{1}{4}dx(1-xx)^2}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{\frac{1}{4}dx \cdot 4xx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{xxdx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}$$

ergeben; weil diese die vorgelegte Form selbst ist, wird aus den vorhergehenden Beispiel $dy = \frac{1}{4}dP - \frac{1}{4}dQ$ sein, als logische Konsequenz $y = \frac{1}{4}P - \frac{1}{4}Q$, daher wird das gesuchte Integral so ausgedrückt gefunden werden

$$\int \frac{xxdx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-xx} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

Scholion

§42 Wenn diese zwei letzten Beispiele auf keine Weise mithilfe eines bestimmten Substitution rational gemacht werden könnten, wären sie ein ausgezeichnetes Beispiel, dass die oben erwähnten Folgerung falsch sein kann. Aber nach eingehender Betrachtung der Angelegenheit habe ich herausgefunden, dass all diese vier Beispiele mithilfe einer einzigen Substitution sofort rational gemacht und daher integriert werden können; es wird natürlich der Mühe wert sein, dass gezeigt zu haben.

Eine andere Auflösung der vier letzten Beispiele

§43 Man setze für das erste Beispiel

$$v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$$

und es wird

$$\sqrt{1+vv} = \frac{1+xx}{\sqrt{1+x^4}}$$

sein; dann aber

$$\sqrt{1-vv} = \frac{1-xx}{\sqrt{1+x^4}},$$

woher

$$\sqrt{\frac{1+vv}{1-vv}} = \frac{1+xx}{1-xx} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-v^4} = \frac{1-x^4}{1+x^4}$$

wird. Aber durch Differenzieren erhalten wir

$$dv = \frac{dx(1-x^4)\sqrt{2}}{(1+x^4)\sqrt{1+x^4}}.$$

Weil nun $\frac{1-x^4}{1+x^4} = \sqrt{1-v^4}$ ist, wird $dv = \frac{dx\sqrt{2}\sqrt{1-v^4}}{\sqrt{1+x^4}}$ oder

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{dx\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$$

sein, welche Gleichheit höchst bemerkenswert ist. Wenn diese Gleichung nun mit $\sqrt{\frac{1+vv}{1-vv}} = \frac{1+xx}{1-xx}$ multipliziert wird, wird diese Gleichung entstehen

$$\frac{dv}{1-vv} = \frac{dx(1+xx)\sqrt{2}}{(1-xx)\sqrt{1+x^4}}$$

und so wird

$$\int \frac{dx(1+xx)}{(1-xx)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-vv} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{1+v}{1-v}$$

sein. Weiter multipliziere man die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

mit $\sqrt{\frac{1-vv}{1+vv}} = \frac{1-xx}{1+xx}$ und es wird die Formel des zweiten Beispiels hervorgehen,

$$\int \frac{dx(1-xx)}{(1+xx)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1+vv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan v.$$

Weiter teile man dieselbe Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

durch $\sqrt{1-v^4} = \frac{1-x^4}{1+x^4}$ und es wird

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{1-v^4} = \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$$

hervorgehen; dies ist die Form des dritten Beispiels, sodass nun

$$\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-v^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1+vv} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-vv}$$

ist, welches Integral mit dem zuvor gefundenen hervorragend übereinstimmt. Schließlich multipliziere man die letzte hier gefundenen Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{1-v^4} = \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$$

mit $vv = \frac{2xx}{1+x^4}$, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{vvdv}{1-v^4} = \frac{2xxdx\sqrt{1+x^4}}{(1-x^4)(1+x^4)} = \frac{2xxdx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}}$$

hervorgeht, woher man für das vierte Beispiel

$$\int \frac{xxdx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{vvdv}{1-v^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1+vv} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \frac{dv}{1-vv}$$

berechnet, woher, weil $v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$ ist,

$$\int \frac{dv}{1-vv} = \frac{1}{2} \log \frac{1+v}{1-v} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{(\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2})^2}{(1-xx)^2}$$

$$= \log \frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-xx}$$

sein wird. Darauf ist aber

$$\int \frac{dv}{1+vv} = \arctan v = \arcsin \frac{v}{\sqrt{1+vv}} = \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1+xx}.$$

SCHOLION

§44 Obwohl sich aber diese vier Beispiel rational machen lassen, bleibt dennoch die oben erwähnte Folgerung, dass alle Integralformeln, welche auf keine Weise rational gemacht werden können, sich auf ein anderes Geschlecht an transzendenten Größen beziehen und weder allein durch Logarithmen noch Kreisbogen ausgeführt werden können, nicht nur verdächtig, sondern ihre Falschheit kann auch deutlich vor Augen geführt werden. Es sei nämlich die Funktion

$$X = \frac{a}{\sqrt{1+xx}} + \frac{b}{\sqrt[3]{1+x^3}} + \frac{c}{\sqrt[4]{1+x^4}};$$

dann wird die Differentialform Xdx gewiss auf keine Weise rational gemacht werden können; dennoch können indes ihre einzelnen Teile

$$\frac{a}{\sqrt{1+xx}}, \quad \frac{b}{\sqrt[3]{1+x^3}} \quad \text{und} \quad \frac{c}{\sqrt[4]{1+x^4}}$$

getrennt rational gemacht werden und die Integrale mit Logarithmen und Kreisbogen dargeboten werden. Anstelle eines Schlussschnörkels wollen wir das folgende bemerkenswerte Problem hinzufügen.

PROBLEM 14

§45 *Von den Integralformeln*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad \textit{und} \quad \int \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}$$

die Werte mithilfe von Reihen für die Fälle ausfindig zu machen, in denen so $v = 1$ *wie* $x = 1$ *gesetzt wird.*

LÖSUNG

Weil für $v = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}$ gesetzt, wie wir es oben gemacht haben, ersichtlich ist, dass für $x = 0$ auch $v = 0$ und für $x = 1$ auch $v = 1$ sein wird, sodass diese zwei Größen x und v gleichzeitig verschwinden und gleichzeitig der Einheit gleich werden, leiten wir daraus diese absolute bemerkenswerte Differentialgleichung ab

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

welche beiden Formen also in Reihen umgewandelt werden müssen; es wird aber

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^4}} = (1-v^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}v^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}v^8 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}v^{12} + \text{etc.}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^8 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^{12} + \text{etc.}$$

sein. Nun liefert jene mit dv multipliziert und integriert

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = v + \frac{1}{2 \cdot 5}v^5 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9}v^9 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13}v^{13} + \text{etc.},$$

woher für $v = 1$ gesetzt der Wert dieses Integrals

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 17} + \text{etc.}$$

sein wird, welche Reihe wir mit dem Buchstaben A bezeichnen wollen. In gleicher Weise ergibt die andere Reihe mit dx multipliziert und integriert

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1+x^4}} = x - \frac{1}{2 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9}x^9 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13}x^{13} + \text{etc.},$$

deren Wert für $x = 1$ gesetzt

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 9} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 13} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 17} - \text{etc.}$$

sein wird, welchen wir mit dem Buchstaben B bezeichnen wollen, sodass $B = \frac{A}{\sqrt{2}}$ oder $A = B\sqrt{2}$ ist, woher klar ist, dass die erste Reihe sich zur zweiten verhält wie $\sqrt{2} : 1$.

Scholion

§46 Der Wert der Integralformel $\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}$ kann auch auf diese Weise mit einer Reihe ausfindig gemacht werden. Weil

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^4}} = \frac{(1+vv)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-vv}}$$

und

$$(1+vv)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}vv + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}v^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}v^6 + \text{etc.}$$

ist, bemerke man, dass $\int \frac{dv}{\sqrt{1-vv}} = \frac{\pi}{2}$ ist. Weiter setze man für die Integration der übrigen Terme

$$\int \frac{v^{n+2}dv}{\sqrt{1-vv}} = Av^{n+1}\sqrt{1-vv} + B\int \frac{v^n dv}{\sqrt{1-vv}},$$

welche Gleichung differenziert

$$\frac{v^{n+2}dv}{\sqrt{1-vv}} = (n+1)Av^n\sqrt{1-vv} - \frac{Av^{n+2}}{\sqrt{1-vv}} + \frac{Bv^n}{\sqrt{1-vv}}$$

gibt, welche durch Multiplizieren mit $\sqrt{1-vv}$ als

$$v^{n+2} = (n+1)Av^n - (n+1)Av^{n+2} - Av^{n+2} + Bv^n$$

hervorgeht. Daher liefern die Terme, in denen v^{n+2} enthalten ist, einander gleichsetzt $1 = -(n+2)A$ und daher $A = -\frac{1}{n+2}$, die v^n enthaltenden Terme hingegen liefern $0 = (n+1)A + B$, woher $B = \frac{n+1}{n+2}$ wird, sodass im Allgemeinen

$$\int \frac{v^{n+2}dv}{\sqrt{1-vv}} = -\frac{1}{n+2}v^{n+1}\sqrt{1-vv} + \frac{n+1}{n+2}\int \frac{v^n dv}{\sqrt{1-vv}}$$

ist, welches Integral, wie verlangt, für $v = 0$ verschwindet. Man setze nun $v = 1$ und es wird

$$\int \frac{v^{n+2}dv}{\sqrt{1-vv}} = \frac{n+1}{n+2}\int \frac{v^n}{\sqrt{1-vv}}$$

sein; daher wird also, indem man für n nacheinander die Werte 0, 2, 4, 6, 8 etc. schreibt, sein:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & \int \frac{vvdv}{\sqrt{1-vv}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\\
\text{II.}\quad & \int \frac{v^4dv}{\sqrt{1-vv}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\\
\text{III.}\quad & \int \frac{v^6dv}{\sqrt{1-vv}} = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

etc.,

unter Verwendung welcher Werte im Fall $v=1$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} &= \frac{\pi}{2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\cdot\frac{\pi}{2} + \text{etc.}\\
&= \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} - \text{etc.}\right)
\end{aligned}$$

sein wird, sodass aus dem vorhergehenden Problem heraus

$$1 - \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 13} + \text{etc.} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \text{etc.}\right)$$

ist, woher

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 13} + \text{etc.}}{1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \text{etc.}}$$

wird.